NILAI KETAKTERATURAN TOTAL SISI DARI GRAF TANGGA (*STAIR GRAPH*)

Septiyani Setyo Wulandari[28], Slamin[29], Susi Setiawani[30]

Abstract. *The total edges labelling λ is called an edge irregular total k-labelling of a graph G if every two distinct edges* u *and v in G ωt(u)≠ωt(v). The total edge irregularity strength of G is the minimum positive integer k for which G has a total edge irregular k-labelling. There are not many graphs of which their total edge irregularity strengths are known. In this article, we investigate the total edge irregularity strength of Stair Graph* $tes(St_n)$ *and union of m isomorphic Stair Graphs* $tes(mSt_n)$.

Key Words*: Total edge irregularity strength, Stair Graph* (St_n).

PENDAHULUAN

Matematika memiliki peranan penting dalam pengembangan IPTEK. Hal ini dikarenakan, matematika merupakan ilmu dasar dari setiap ilmu pengetahuan yang dapat dipertanggung jawabkan. Pelabelan graf merupakan salah satu kajian dalam teori graf yang mulai berkembang dan banyak diminati karena memiliki peranan yang penting di berbagai bidang. Salah satunya adalah pelabelan total sisi irregular, yaitu pelabelan nilai bilangan bulat positif dimana nilai yang digunakan boleh berulang pada himpunan titik dan sisi dari suatu graf G dengan bobot setiap sisinya berbeda. Permasalahann pada pelabelan ini adalah bagaimana cara melabeli graf sedemikian hingga bilangan bulat positif terbesar yang dijadikan label pada beberapa variasi pelabelan total sisi irregular adalah seminimum mungkin. Bilangan bulat positif terbesar yang minimum tersebut dinamakan dengan nilai ketakteraturan total sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan *tes*(G).

Penelitian ini akan membahas tentang nilai ketakteraturan total sisi dari graf tangga (*total edge irregularity strength of stair graph*) St_n karena belum pernah ada penelitian yang serupa sebelumnya pada graf ini. Beberapa rumusan masalah adalah: (1) berapakah nilai ketakteraturan total sisi (*tes*) dalam pelabelan total sisi irregular pada graf

[28] Mahasiswa Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember
[29] Dosen Prodi Sistem Informasi Universitas Jember
[30] Dosen Prodi Pendidikan Matematika FKIP Universitas Jember

tangga tunggal?, dan (2) berapakah nilai ketakteraturan total sisi (*tes*) dalam pelabelan total sisi irregular pada gabungan graf tangga isomorfis?

Penelitian dibatasi pada nilai ketakteraturan total sisi (*tes*) dari graf tangga St_n dan mSt_n dengan $n \geq 2$ dan $m \geq 2$. Dalam hal ini, m merupakan banyaknya graf tangga sedangkan n merupakan banyaknya anak tangga.

PELABELAN TOTAL SISI IRREGULAR

Pelabelan total sisi irregular pada graf G merupakan pemberian nilai bilangan bulat positif dimana nilai yang digunakan boleh berulang pada himpunan titik dan sisi dengan bobot setiap sisinya berbeda seminimum mungkin. Nilai minimum tersebut dinamakan dengan nilai ketakteraturan total sisi (*total edge irregularity strength*) dari graf G yang dinotasikan dengan *tes*(G).

Teorema 1. *Jika G* = (*V, E*) *adalah sebuah graf dengan himpunan titik V danhimpunan sisi E (tidak kosong), maka:*

$$\left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil \leq tes(G) \leq |E|$$

Bukti : Misalkan sebuah graf G dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E, jika setiap titik pada G diberi label 1 dan sisi pada G diberi label 1, 2,…, |E|. Maka nilai bobot untuk masing-masing sisi pada graf G adalah penjumlahan dari ketiga label:

$$\omega t(e_i) = i + 2, \qquad i = 1,2,3, \dots, |E|$$

Berdasarkan teorema di atas, maka dengan mensubtitusikan jumlah sisi pada graf tangga akan didapat batas bawah dari nilai ketakteraturan total sisi dari graf tangga St_n yaitu $tes(St_n) = \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$

GRAF TANGGA (*STAIR GRAPH*)

Graf Tangga (I. Aprilia, 2011) merupakan sebuah graf yang dinotasikan dengan St_n dimana n adalah banyak anak tangga. Graf Tangga menyerupai bentuk tangga pada suatu bangunan. Graf Tangga mempunyai *8n+2* titik dan *16n+1* sisi. Graf Tangga mempunyai himpunan titik dimana:

$$V(St_n) = \{x_i, y_i, z_j, q_k; 1 \le i \le n, 1 \le j \le 2n+2, 1 \le k \le 4n\}$$

dan himpunan sisi:

$$E(St_n) = x_i y_i,\ x_i z_{2i\pm1},\ y_i z_{2i\pm2}, y_i z_{2i},\ y_i q_{4i-2},\ y_i q_{4i-3},\ x_i q_{4i-1},\ x_i q_{4i};\ 1 \le i \le n\} \cup \{q_i q_{i+1};\ i \text{ ganjil},\ 1 \le i \le 4n-1\} \cup \{z_i z_{i+1};\ i \text{ ganjil},\ 1 \le i \le 2n+1\} \cup \{z_i q_{2i-1},\ z_i q_{2i};\ i \text{ ganjil},\ 1 \le i \le 2n-1\} \cup \{z_i q_{2i-4},\ z_i q_{2i-5};\ i \text{ ganjil}, 1 \le i \le 2n+2\}.$$

METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan pada graf tangga tunggal dan gabungan saling lepas graf tangga yang isomorfis dengan menggunakan metode deduktif asiomatik dengan menurunkan teorema 1. Jika pada graf tersebut ditemukan pelabelan total sisi irregular maka dilanjutkan dengan pendeteksian pola (*pattern recognition*). Adapun teknik penelitian adalah sebagai berikut: (1) menentukan batas bawah dan batas atas dari *tes* (*G*) berdasarkan teorema 1. Dengan mensubstitusikan jumlah sisi pada graf tangga St_n pada formula sehingga diperoleh: $\left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil \le tes(G) \le (16n+3)$. Untuk gabungan graf tangga isomorfis secara umum: $\left\lceil \frac{m(16n+1)+2}{3} \right\rceil \le tes(G) \le m(16n+1)$ untuk $n \ge 2$ dan $m \ge 2$; (2) melabeli graf St_n untuk $n \ge 2$ dengan label $\{1,2,\ldots, n\}$, sedangkan gabungan mSt_n untuk $m \ge 2$ juga dilabeli dengan label $\{1,2,\ldots, m(16n+1)\}$ sedemikian hingga bobot setiap sisinya berbeda; (3) menentukan formulasi yang berupa fungsi yang memetakan himpunan titik $V(St_n)$ dan himpunan sisi $E(St_n)$ pada bilangan bulat positif; (4) memeriksa kembali dengan menggunakan formulasi yang telah ditentukan pada langkah 3 untuk melihat apakah bobot setiap sisinya sudah berbeda; (5) menentukan nilai *tes* (St_n), untuk $n \ge 2$ dengan menggunakan batas atas dan batas bawah yang sudah diperoleh; (6) melakukan prosedur yang sama seperti langkah - langkah diatas untuk menentukan *tes* (mSt_n) untuk $n \geq 2$, dan $m \geq 2$ pada gabungan graf tangga isomorfis.

HASIL DAN PEMBHASAN

Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Graf Tangga Tunggal

Menurut definisi, Graf tangga memiliki jumlah titik sebanyak $|V(St_n)|=8n+2$ dan jumlah sisi sebanyak $|E(St_n)|=16n+1$. Jumlah titik dan jumlah sisi pada graf tangga digunakan untuk menentukan batas pada pelabelan total sisi irregular pada graf tangga, sehingga akan dibuktikan bahwa $tes(St_n) = \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$.

Teorema 2. *Nilai ketakteraturan total sisi dari graf tangga tunggal adalah* $tes(St_n) = \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$ *untuk* $n \geq 2$.

Bukti : Menurut Teorema 1. $tes(G) \geq \left\lceil \frac{|E|+2}{3} \right\rceil$, karena $|E(St_n)|=16n+1$ sehingga $tes(St_n) \geq \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$. Selanjutnya akan dibuktikan batas atas dari $tes(St_n) \leq \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$, yaitu dengan cara melabeli titik-titik dan sisi-sisi pada graf tangga St_n dengan mengikuti formula berikut:

1. Label Titik

$$\lambda(x_i) = 5i - 1 + \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor ; \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$\lambda(y_i) = 5i + 1 + \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor ; \qquad i = 1, \cdots, n$$

$$\lambda(z_j) = \begin{cases} 5\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor - 4 + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor}{3} \right\rfloor ; & j = 1, \cdots, 2n+2 \,\text{dan}\, j \neq 5 \bmod 6 \\ 5\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor - 5 + \left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor}{3} \right\rfloor ; & j \equiv 5 \bmod 6 \end{cases}$$

$$\lambda(q_k) = k - 2 + 2\left\lfloor \frac{k+3}{4} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2\left\lfloor \frac{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor + 1}{2} \right\rfloor + 2}{3} \right\rfloor ; \qquad k = 1, \cdots, 4n.$$

2. Label Sisi

$$\begin{aligned}
\lambda(x_i z_{(2i-1)}) &= 5i-4+\left\lfloor \tfrac{i+1}{3} \right\rfloor, \qquad i=1,\cdots,n.\\
\lambda(x_i y_i) &= \lambda(y_i q_{(4i-3)}) = \lambda(y_i q_{(4i-2)}) = \lambda(y_i z_{(2i)})\\
&= 4i-3+2\left\lfloor \tfrac{2i-1}{3} \right\rfloor, \qquad i=1,\ldots,n\\
\lambda(x_i z_{(2i+1)}) &= \lambda(x_i q_{(4i)}) = \lambda(x_i q_{(4i-1)})\\
&= 4i+2\left\lfloor \tfrac{2i-1}{3} \right\rfloor, \qquad i=1,\ldots,n\\
\lambda(y_i z_{(2i+2)}) &= 5i-1+\left\lfloor \tfrac{i-1}{3} \right\rfloor, \qquad i=1,\cdots,n.\\
\lambda(z_i z_{(i+1)}) &= 5(\tfrac{i+1}{2})-4+\left\lfloor \tfrac{i+3}{6} \right\rfloor, \quad i=1,\cdots,2n+1 \text{ dan ganjil}\\
\lambda(z_i q_{(2i-1)}) &= \lambda(z_i q_{(2i)})\\
&= 5(\tfrac{i+1}{2})-4+\left\lfloor \tfrac{i+3}{6} \right\rfloor, \quad i=1,\cdots,2n-1 \text{ dan ganjil}\\
\lambda(q_i q_{(i+1)}) &= \begin{cases} i+1+2\left\lfloor \tfrac{i-1}{6} \right\rfloor, & i \equiv 1 \bmod 12 \text{ dan } i \equiv 9 \bmod 12\\ i+3+2\left\lfloor \tfrac{i-1}{6} \right\rfloor, & i \equiv 5 \bmod 12\\ i+5+2\left\lfloor \tfrac{i-1}{6} \right\rfloor, & i \equiv 3 \bmod 12 \text{ dan } i \equiv 11 \bmod 12\\ i+7+2\left\lfloor \tfrac{i-1}{6} \right\rfloor, & i \equiv 7 \bmod 12 \end{cases}\\
\lambda(z_i q_{(2i-4)}) &= \lambda(z_i q_{(2i-5)})\\
&= 5(\tfrac{i}{2})-4+\left\lfloor \tfrac{i+2}{6} \right\rfloor, i=4,\cdots,2n+2 \text{ dan genap}
\end{aligned}$$

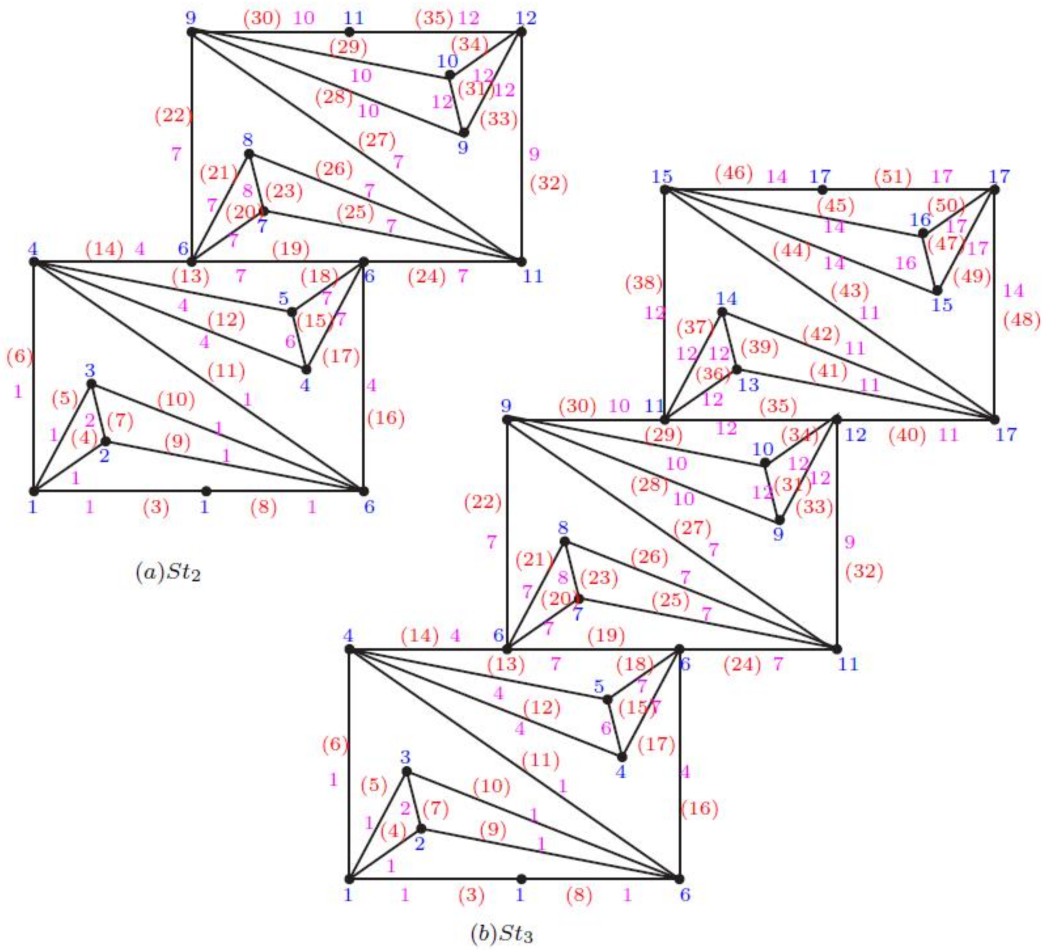
Dari formulasi pelabelan di atas, diperoleh label terbesarnya adalah $\left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$. Perhatikan (z_j) saat $j=n+2$, nilai $\lambda(z_{n+2}) = tes(St_n) = \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$. Karena nilai $\lambda(z_{n+2})$ merupakan batas atas dari $tes(St_n)$, maka $tes(St_n) \le \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$. Sehingga batas atas St_n = batas bawah St_n. Dan dapat disimpulkan pula bahwa $tes(St_n) = \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$ untuk $n \ge 2$.

3. Bobot Sisi

Penghitungan bobot sisi dari setiap sisi dapat diperoleh dengan cara menjumlahkan label pada sisi dengan label titik-titik yang berhubungan dengan sisi yang tersebut. Namun apabila diteliti lebih lanjut, formulasi bobot sisi pada graf tangga sama dengan formulasi label sisi pada pelabelan titik (3,1)-sisi antimagic pada graf Tangga St_n yang telah ditemukan oleh Ira Aprilia (2011). Berikut merupakan formulasi dari bobot sisi dari graf tangga:

$$
\begin{aligned}
\omega(x_i y_i) &= 16i-5, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(x_i z_{(2i-1)}) &= 16i-10, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(y_i z_{(2i)}) &= 16i-8, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(y_i q_{(4i-3)}) &= 16i-7, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(y_i q_{(4i-2)}) &= 16i-6, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(x_i z_{(2i+1)}) &= 16i-2, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(x_i q_{(4i)}) &= 16i-3, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(x_i q_{(4i-1)}) &= 16i-4, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(y_i z_{(2i+2)}) &= 16i, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(z_i z_{(i+1)}) &= 8i-5, && i=1,\cdots,2n+1\,\text{dan ganjil}\\
\omega(z_i q_{(2i-1)}) &= 8i-4, && i=1,\cdots,2n-1\,\text{dan ganjil}\\
\omega(z_i q_{(2i)}) &= 8i-3, && i=1,\cdots,2n-1\,\text{dan ganjil}\\
\omega(z_i q_{(2i-4)}) &= 8i-14, && i=4,\cdots,2n+2\,\text{dan genap}\\
\omega(z_i q_{(2i-5)}) &= 8i-15, && i=4,\cdots,2n+2\,\text{dan genap}\\
\omega(q_i q_{(i+1)}) &= 4i+3, && i=1,\cdots,4n-1\,\text{dan ganjil}
\end{aligned}
$$

Dari formulasi bobot sisi pada graf tangga, dapat terlihat bahwa bobot berbeda pada setiap sisi dan berada pada himpunan *{3,4,5,…,16n+3}* Berikut contoh hasil penelitian pelabelan total sisi irregular pada graf tangga St_n.



Gambar 1. Hasil pelabelan tes pada graf tangga (a) St_2 dan (b) St_3

Nilai Ketakteraturan Total Sisi dari Gabungan Isomorfis Graf Tangga

Gabungan graf tangga yang isomorfis dinotasikan dengan mSt_n. yang didefinisikan sebagai gabungan saling lepas sebanyak *m* copy graf tangga.

$$St_n \cup St_n \cup \ldots \cup St_n = \bigcup_{i=2}^{m} St_n = mSt_n$$

Teorema pada subbab ini merupakan pengembangan dari hasil penelitian sebelumnya yang merupakan tes dari graf tangga tunggal St_n.

Teorema 3 *Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan graf tangga isomorfis adalah* $tes(mSt_n) = \left\lceil \frac{m(16n+1)+2}{3} \right\rceil$, *untuk* $m \geq 2$, *dan* $n \geq 2$.

Bukti : Berdasarkan Teorema 1. Dapat diketahui bahwa batas bawah $tes(mSt_n) \geq \left\lceil \frac{m(16n+1)+2}{3} \right\rceil$ dengan cara mensubtitusikan banyaknya sisi pada gabungan graf tangga $|E(mSt_n)| = m(16n+1)$ ke dalam teorema 1. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa batas atas dari $tes(mSt_n)$ dengan cara melabeli titik dan sisi pada graf tangga isomorfis dengan formulasi sebagai berikut (namun dalam artikel ini hanya akan ditampilkan untuk $n \equiv 2 \bmod 3$ saja, sedangkan untuk $n \equiv 1 \bmod 3$ dan $n \equiv 0 \bmod 3$ dapat dilihat dalam skripsi peneliti) :

1. Label Titik

Untuk $n \equiv 2 \bmod 3$, $n \equiv 0 \bmod 3$ dan $\ell = 2, \cdots, m$

$$\lambda(x_{i,\ell}) = \left\lceil \frac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + 5i - 2, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

$$\lambda(y_{i,\ell}) = \left\lceil \frac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + \left\lfloor \frac{i}{3} \right\rfloor + 5i, \qquad i = 1, \cdots, n.$$

$$\lambda(z_{j,\ell}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 5\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor - 5 + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}{3} \right\rfloor, & \begin{cases} j = 1, \cdots, 2n+2 \\ \text{dan } j \neq 5 \bmod 6 \end{cases} \\ \left\lceil \frac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 5\left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor - 6 + \left\lfloor \frac{\lfloor \frac{j+1}{2} \rfloor}{3} \right\rfloor, & j \equiv 5 \bmod 6 \end{cases}$$

$$\lambda(q_{k,\ell}) = \begin{cases} \left\lceil \frac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + k - 3 + 2\left\lfloor \frac{k+3}{4} \right\rfloor - \\ \left\lfloor \frac{2\left\lfloor \frac{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + 1}{2} \right\rfloor + 2}{3} \right\rfloor, & k = 1, \cdots, 4n. \end{cases}$$

2. Label Sisi

$$
\begin{aligned}
&\text{Untuk } n \equiv 2 \bmod 3 \text{ dan } \ell = 2, \cdots, m\\
\lambda(x_{i,\ell}z_{(2i-1,\ell)}) &= \left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 5i - 5 + \left\lfloor \tfrac{i+1}{3} \right\rfloor, \qquad i = 1, \cdots, n.\\
\lambda(x_{i,\ell}z_{(2i+1,\ell)}) &= \lambda(x_{i,\ell}q_{(4i,\ell)}) = \lambda(x_{i,\ell}q_{(4i-1,\ell)})\\
&= \left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 4i - 1 + 2\left\lfloor \tfrac{2i-1}{3} \right\rfloor, \quad i = 1, \ldots, n\\
\lambda(x_{i,\ell}y_{i,\ell}) &= \lambda(y_{i,\ell}q_{(4i-3,\ell)}) = \lambda(y_{i,\ell}q_{(4i-2,\ell)}) = \lambda(y_{i,\ell}z_{(2i,\ell)})\\
&= \left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 4i - 4 + 2\left\lfloor \tfrac{2i-1}{3} \right\rfloor, \quad i = 1, \ldots, n\\
\lambda(z_{i,\ell}q_{(2i-1,\ell)}) &= \lambda(z_{i,\ell}q_{(2i,\ell)})\\
&= \left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 5(\tfrac{i+1}{2}) - 5 + \left\lfloor \tfrac{i+3}{6} \right\rfloor, \begin{cases} i = 1, \cdots, 2n-1 \\ \text{dan ganjil} \end{cases}\\
\lambda(q_{i,\ell}q_{(i+1,\ell)}) &= \begin{cases}
\left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + i + 2\left\lfloor \tfrac{i-1}{6} \right\rfloor, \begin{cases} i \equiv 1 \bmod 12 \\ i \equiv 9 \bmod 12 \end{cases}\\
\left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + i + 2 + 2\left\lfloor \tfrac{i-1}{6} \right\rfloor, \; i \equiv 5 \bmod 12\\
\left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + i + 4 + 2\left\lfloor \tfrac{i-1}{6} \right\rfloor, \begin{cases} i \equiv 3 \bmod 12 \\ i \equiv 11 \bmod 12 \end{cases}\\
\left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + i + 6 + 2\left\lfloor \tfrac{i-1}{6} \right\rfloor, \; i \equiv 7 \bmod 12
\end{cases}\\
\lambda(z_{i,\ell}z_{(i+1,\ell)}) &= \left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 5(\tfrac{i+1}{2}) - 5 + \left\lfloor \tfrac{i+3}{6} \right\rfloor, \begin{cases} i = 1, \cdots, 2n+1 \\ \text{dan ganjil} \end{cases}\\
\lambda(y_{i,\ell}z_{(2i+2,\ell)}) &= \left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 5i - 2 + \left\lfloor \tfrac{i-1}{3} \right\rfloor, \qquad i = 1, \cdots, n.\\
\lambda(z_{i,\ell}q_{(2i-4,\ell)}) &= \lambda(z_{i,\ell}q_{(2i-5,\ell)})\\
&= \left\lceil \tfrac{(m-1)(16n+1)+2}{3} \right\rceil + 5(\tfrac{i}{2}) - 5 + \left\lfloor \tfrac{i+2}{6} \right\rfloor, \begin{cases} i = 4, \cdots, 2n+2 \\ \text{dan genap} \end{cases}
\end{aligned}
$$

3. Bobot Sisi

$$
\begin{aligned}
\omega(x_{i,\ell}y_{i,\ell}) &= (m-1)(16n+1)+16i-5, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(x_{i,\ell}z_{(2i-1,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+16i-10, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(y_{i,\ell}q_{(4i-3,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+16i-7, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(y_{i,\ell}q_{(4i-2,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+16i-6, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(x_{i,\ell}z_{(2i+1,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+16i-2, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(x_{i,\ell}q_{(4i,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+16i-3, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(x_{i,\ell}q_{(4i-1,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+16i-4, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(y_{i,\ell}z_{(2i+2,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+16i, && i=1,\cdots,n.\\
\omega(z_{i,\ell}z_{(i+1,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+8i-5, && i=1,\cdots,2n+1 \text{ dan ganjil}\\
\omega(z_{i,\ell}q_{(2i-1,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+8i-4, && i=1,\cdots,2n-1 \text{ dan ganjil}\\
\omega(z_{i,\ell}q_{(2i,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+8i-3, && i=1,\cdots,2n-1 \text{ dan ganjil}\\
\omega(z_{i,\ell}q_{(2i-4,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+8i-14, && i=4,\cdots,2n+2 \text{ dan genap}\\
\omega(z_{i,\ell}q_{(2i-5,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+8i-15, && i=4,\cdots,2n+2 \text{ dan genap}\\
\omega(q_{i,\ell}q_{(i+1,\ell)}) &= (m-1)(16n+1)+4i+3, && i=1,\cdots,4n-1 \text{ dan ganjil}
\end{aligned}
$$

Berikut merupakan contoh hasil penelitian pelabelan total sisi irregular pada graf tangga mSt_n.

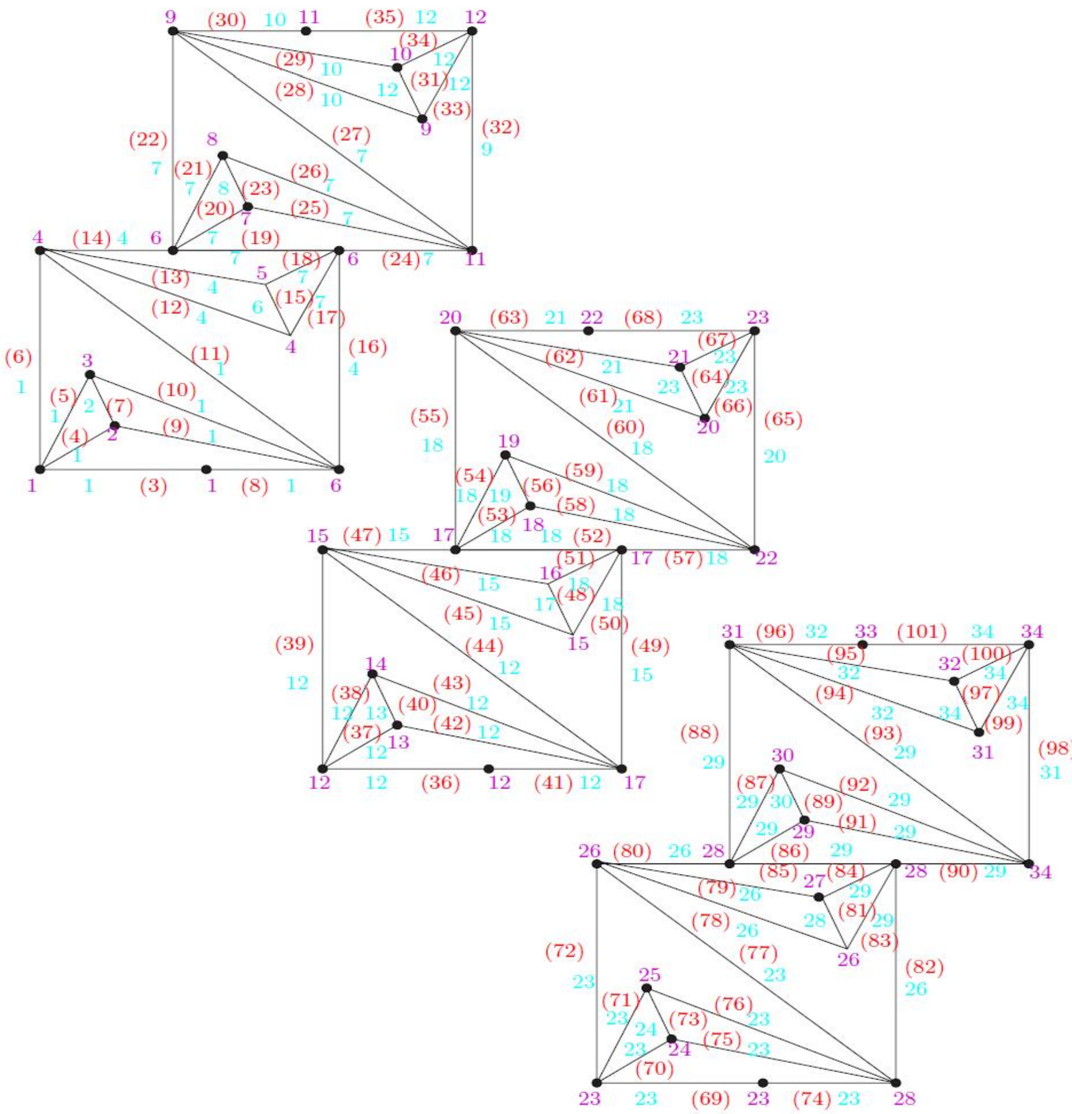
KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dari pembahasan di atas, dapat disimpulkan bahwa nilai ketakteraturan total sisi (*tes*) dari graf tangga tunggal maupun gabungannya adalah sebagai berikut:

1. *Nilai ketakteraturan total sisi dari graf tangga tunggal adalah* $tes(St_n) = \left\lceil \frac{16n+3}{3} \right\rceil$ *untuk* $n \geq 2$.

2. *Nilai ketakteraturan total sisi pada gabungan graf tangga isomorfis adalah* $tes(mSt_n) = \left\lceil \frac{m(16n+1)+2}{3} \right\rceil$, *untuk m ≥2, dan n ≥2.*

Open problem 1 *Graf tangga telah diteliti menggunakan pelabelan total super (a,d) - sisi antimagic dan pelabelan total sisi irregular, adakah keterkaitan antara kedua pelabelan tersebut pada graf tangga.*



Gambar 2. Hasil pelabelan tes pada gabungan graf tangga *3St₂*

DAFTAR PUSTAKA

Aprilia, Ira. 2011. *Pelabelan Total Super (a, d)-Sisi Antimagic pada Graf Tangga*. Tidakdipublikasikan (Skripsi). Jember : Universitas Jember

Bača, M., JendroĺĹ.,Miller,M. dan Ryan,J. 2007. *On Irregular Total Labelling. Discrete Mathematics*, 307(1): 1378-1388.

Nurdin. *The Total Irregular Labelling Of An Amalgamation Of Cycle Graphs.* Universitas Hasanudin. Artikel.

Pfender*, F. Total Edge Irregularity Strength Of Large Graphs. Artikel.*

Siddiqui, M. K. 2013. *Total edge irregularity strength of the disjoint union of sun graphs.* International Journal of Mathematics and Soft Computing. Artikel.